Démélange par Factorisation en Matrices Non négatives adapté à un mélange linéaire quadratique pour des images hyperspectrales urbaines

Inès Meganem, Yannick Deville, Shahram Hosseini, Philippe Déliot, Xavier Briottet

IRAP/CNRS, Université de Toulouse, France
ONERA, Toulouse, France

SFTH 2012

Plan

Introduction

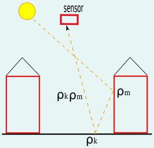
Problématique

- Résolution spatiale des imageurs hyperspectraux souvent basse
  $\longmapsto$ pixels = mélange de matériaux.
- La plupart des méthode de démélange reposent sur un modèle linéaire:
  $\langle \rho \rangle = \sum_{k=1}^{N} S_k \rho_k$ $\rightsquigarrow$ valide pour surface plane + éclairement homogène.

- **But ici :** Démélange hyperspectral pour images urbaines

$\mapsto$ structures 3D, réflexions

$\Longrightarrow$ **modèle de mélange linéaire non valide !**



Approche adoptée

1. Etablir et valider le modèle de mélange à partir d'équations basées sur la théorie du transfert radiatif
$\longmapsto$ modèle Linéaire Quadratique.

2. Démélange : méthode de séparation aveugle de sources basée sur la NMF (Non-negative Matrix Factorization).

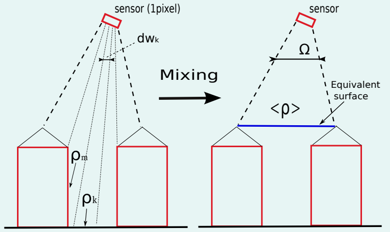
Principe

1. Chaque pixel = N surfaces élémentaires homogènes de réflectances ρ_k
2. Chaque pixel (à basse résolution)

   $\updownarrow$

   une surface équivalente plane au niveau de la canopée urbaine, avec une réflectance équivalente $\langle\rho\rangle$

$\hookrightarrow$**But** : une equation exprimant $\langle\rho\rangle$ en fonction des réflectances ρ_k.



Equations physiques menant au modèle

- Luminance totale reçue par le capteur, pour 1 pixel :

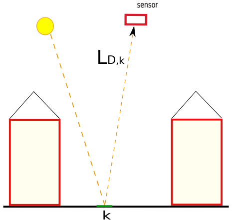
(1) considérant le pixel composé de N surfaces élémentaires k :

Equations physiques menant au modèle

- Luminance totale reçue par le capteur, pour 1 pixel :

(1) considérant le pixel composé de N surfaces élémentaires k :

$$L_{mix} = \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \frac{\rho_k^{dd}(\overrightarrow{U_s}, \overrightarrow{U_{c,k}})}{\pi} E_{D,k}$$

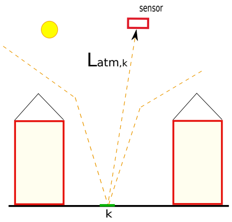


Equations physiques menant au modèle

- Luminance totale reçue par le capteur, pour 1 pixel :

(1) considérant le pixel composé de N surfaces élémentaires k :

$$L_{mix} = \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \frac{\rho_k^{dd}(\overrightarrow{U_s}, \overrightarrow{U_{c,k}})}{\pi} E_{D,k} + \sum_k S_k L^{\downarrow}_{atm,k}$$

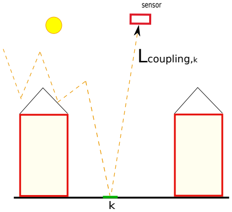


Equations physiques menant au modèle

- Luminance totale reçue par le capteur, pour 1 pixel :

(1) considérant le pixel composé de N surfaces élémentaires k :

$$L_{mix} = \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \frac{\rho_k^{dd}(\overrightarrow{U_s}, \overrightarrow{U_{c,k}})}{\pi} E_{D,k} + \sum_k S_k L^{\downarrow}_{atm,k} + \sum_k S_k L_{coupling,k}$$

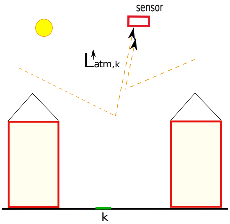


Equations physiques menant au modèle

- Luminance totale reçue par le capteur, pour 1 pixel :

(1) considérant le pixel composé de N surfaces élémentaires k :

$$L_{mix} = \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \frac{\rho_k^{dd}(\overrightarrow{U_s}, \overrightarrow{U_{c,k}})}{\pi} E_{D,k} + \sum_k S_k L^{\downarrow}_{atm,k}$$
$$+ \sum_k S_k L_{coupling,k} + \sum_k S_k L^{\uparrow}_{atm,k}$$

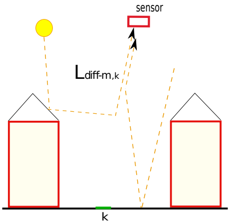


Equations physiques menant au modèle

- Luminance totale reçue par le capteur, pour 1 pixel :

(1) considérant le pixel composé de N surfaces élémentaires k :

$$L_{mix} = \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \frac{\rho_k^{dd}(\overrightarrow{U_s}, \overrightarrow{U_{c,k}})}{\pi} E_{D,k} + \sum_k S_k L^{\downarrow}_{atm,k}$$
$$+ \sum_k S_k L_{coupling,k} + \sum_k S_k L^{\uparrow}_{atm,k} + \sum_k S_k L^{\uparrow}_{diff,k}$$

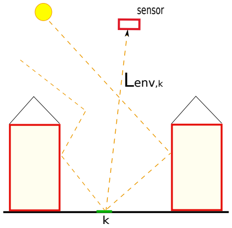


Equations physiques menant au modèle

- Luminance totale reçue par le capteur, pour 1 pixel :

(1) considérant le pixel composé de N surfaces élémentaires k :

$$L_{mix} = \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \frac{\rho_k^{dd}(\overrightarrow{U_s}, \overrightarrow{U_{c,k}})}{\pi} E_{D,k} + \sum_k S_k L^{\downarrow}_{atm,k}$$
$$+ \sum_k S_k L_{coupling,k} + \sum_k S_k L^{\uparrow}_{atm,k} + \sum_k S_k L^{\uparrow}_{diff,k}$$
$$+ \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \iint_{m \in V_k} \frac{\rho_k^{dd}(\overrightarrow{U_{km}}, \overrightarrow{U_{c,k}})}{\pi} g_{m,k} \left[\frac{\rho_m^{dd}(\overrightarrow{U_s}, \overrightarrow{U_{mk}})}{\pi} E_{D,m} + \frac{\rho_m^{hd}(\overrightarrow{U_{mk}})}{\pi} E_{diff,m} \right] dS_m$$



Equations physiques menant au modèle

- Luminance totale reçue par le capteur, pour 1 pixel :

(1) considérant le pixel composé de N surfaces élémentaires k :

$$L_{mix} = \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \frac{\rho_k^{dd}(\overrightarrow{U_s}, \overrightarrow{U_{c,k}})}{\pi} E_{D,k} + \sum_k S_k L^{\downarrow}_{atm,k}$$
$$+ \sum_k S_k L_{coupling,k} + \sum_k S_k L^{\uparrow}_{atm,k} + \sum_k S_k L^{\uparrow}_{diff,k}$$
$$+ \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \iint_{m \in V_k} \frac{\rho_k^{dd}(\overrightarrow{U_{km}}, \overrightarrow{U_{c,k}})}{\pi} g_{m,k} \left[\frac{\rho_m^{dd}(\overrightarrow{U_s}, \overrightarrow{U_{mk}})}{\pi} E_{D,m} + \frac{\rho_m^{hd}(\overrightarrow{U_{mk}})}{\pi} E_{diff,m} \right] dS_m$$

(2) considérant le pixel représenté par une surface équivalente :

$$\langle L \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\pi} E_D t^{\uparrow es-c} + L^{\downarrow}_{atm} + L_{coupling} + L^{\uparrow es-c}_{atm} + L^{\uparrow}_{diff}$$

Equations physiques menant au modèle

- Luminance totale reçue par le capteur, pour 1 pixel :

(1) considérant le pixel composé de N surfaces élémentaires k :

$$L_{mix} = \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \frac{\rho_k^{dd}(\overrightarrow{U_s}, \overrightarrow{U_{c,k}})}{\pi} E_{D,k} + \sum_k S_k L^{\downarrow}_{atm,k}$$
$$+ \sum_k S_k L_{coupling,k} + \sum_k S_k L^{\uparrow}_{atm,k} + \sum_k S_k L^{\uparrow}_{diff,k}$$
$$+ \sum_k S_k t^{\uparrow k-c} \iint_{m \in V_k} \frac{\rho_k^{dd}(\overrightarrow{U_{km}}, \overrightarrow{U_{c,k}})}{\pi} g_{m,k} \left[\frac{\rho_m^{dd}(\overrightarrow{U_s}, \overrightarrow{U_{mk}})}{\pi} E_{D,m} + \frac{\rho_m^{hd}(\overrightarrow{U_{mk}})}{\pi} E_{diff,m} \right] dS_m$$

(2) considérant le pixel représenté par une surface équivalente :

$$\langle L \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\pi} E_D t^{\uparrow es-c} + L^{\downarrow}_{atm} + L_{coupling} + L^{\uparrow es-c}_{atm} + L^{\uparrow}_{diff}$$

$\hookrightarrow$ Les équations (1) et (2) sont égales : $\langle L \rangle = L_{mix}$.

Modèle de mélange

- Identification des termes radiatifs de même nature
  + quelques simplifications

  $\Longrightarrow$ **Réflectance équivalente d'un pixel en fonction des réflectances élémentaires** :

$$\langle\rho\rangle = \sum_{k=1}^{N} S_k \frac{E_{D,k}}{E_D} \boldsymbol{\rho_k} + \sum_{k=1}^{N} \sum_{m \in V_{\boldsymbol{k}}} S_k \frac{g_{m,k}}{\pi} \left(\frac{E_{D,m}}{E_D} + \frac{E_{diff,m}}{E_D} \right) \Delta S \;\; \boldsymbol{\rho_k} \odot \boldsymbol{\rho_m}$$

$\hookrightarrow$ Equation valide pour un pixel totalement ou partiellement éclairé par le soleil ($E_D \neq 0$).

$\hookrightarrow$ Réflectances = vecteurs (spectres).

$\longrightarrow$ Modèle validé avec des images de scènes urbaines simulées par AMARTIS (logiciel à l'ONERA)

$\longrightarrow$ Etude de certaines propriétés du modèle

Adaptation du modèle à la séparation de source

Pour obtenir le modèle final :

- Grouper les surfaces élémentaires de même matériaux $\rightarrow$ associer 1 réflectance à chaque matériau
- utilisations d'hypothèses basées sur l'étude de scènes urbaines simulées (AMARTIS)

$$\boxed{\langle \boldsymbol{\rho_i} \rangle = \sum_{j=1}^{M} a_j(i)\boldsymbol{\rho_j} + \sum_{j=1}^{M}\sum_{\ell=j}^{M} a_{j,\ell}(i)\boldsymbol{\rho_j} \odot \boldsymbol{\rho_\ell}}$$

M : Nombre de matériaux

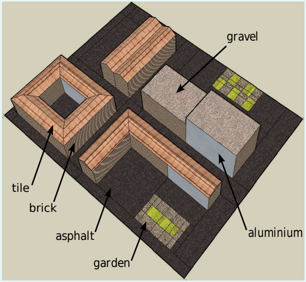
cf [Meganem et al., 2011b, Whispers]

Quelques propriétés physiques du modèle (à partir d'images simulées AMARTIS)

- Importance de la partie quadratique :
  - 10 à 20 % dans les canyons, cours d'immeubles...
  - l'importance dépend des matériaux, proportion de l'ombre...

$\hookrightarrow$ Confirme l'importance de ce terme quadratique pour les milieux urbains !

- Coefficients linéaires : somme égale à 1, positifs.
- Coefficients de la partie quadratique : positifs et inférieurs à 0.5.



Objectif

↪ Méthode de démélange :

- Non supervisée → Séparation aveugle de sources
- Adaptée au modèle linéaire quadratique
- Adaptée aux données : positives, peu (voire pas) de pixels purs, spectres urbains corrélés

Mélanges linéaires quadratiques

↪ Moins étudiés en séparation de sources que le mélange linéaire : quelques méthodes basées sur parcimonie ou indépendance statistique des sources → non adaptées !

↪ Peu de méthodes proposées en démélange en télédétection + généralement supervisées

Méthode proposée : LQ-NMF

$\Longrightarrow$ Méthode de démélange proposée :

- basée sur la NMF (Factorisation en Matrices Non négatives)
  $\rightarrow$ exploiter la positivité des données
- pour des mélanges linéaires quadratiques.

Principe de la NMF

Etant donné une matrice non négative $\boldsymbol{V}$, la NMF (Factorisation en Matrices Non négative) consiste à trouver des matrices non négatives $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{H}$ qui vérifient $\boldsymbol{V} \approx \boldsymbol{W}\boldsymbol{H}$.

Méthode proposée : LQ-NMF

$\rightarrow$ algorithme de gradient projeté

$\rightarrow$ nouveau calcul de gradient par rapport aux sources (spectres)

Le modèle de mélange et son adaptation à la NMF

Modèle de mélange considéré : M = 2 sources

$$\boldsymbol{x_i} = a_1(i)\boldsymbol{\rho_1} + a_2(i)\boldsymbol{\rho_2} + a_{1,2}(i)\boldsymbol{\rho_1} \odot \boldsymbol{\rho_2}$$

$\boldsymbol{x_i}$: spectre du pixel i ($i = 1 \ldots P$), $\boldsymbol{\rho_j}$: spectre de la réflectance j

- Forme matricielle : $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{AS}$
  - $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x_1} \cdots \boldsymbol{x_P}]^T$,
  - $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho_1} & \boldsymbol{\rho_2} & \boldsymbol{\rho_1} \odot \boldsymbol{\rho_2} \end{bmatrix}^T$,
  - $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1(1) & a_2(1) & a_{1,2}(1) \\ \vdots & & \\ a_1(P) & a_2(P) & a_{1,2}(P) \end{bmatrix}$: matrice de mélange

$\hookrightarrow$ Réécriture du modèle LQ sous forme linéaire pour la NMF.

Critère à minimiser

$$J = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{AS}\|_F^2 = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A_a S_a} - \boldsymbol{A_b S_b}\|_F^2.$$

- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_a} & \boldsymbol{A_b} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A_a} = \begin{bmatrix} a_1(1) & a_2(1) \\ \vdots & \vdots \\ a_1(P) & a_2(P) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A_b} = \begin{bmatrix} a_{1,2}(1) \\ \vdots \\ a_{1,2}(P) \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S_a} \\ \boldsymbol{S_b} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{S_a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s_1} & \boldsymbol{s_2} \end{bmatrix}^T$, $\boldsymbol{S_b} = [\boldsymbol{s_1} \odot \boldsymbol{s_2}]^T$

Calcul du gradient

- Pas de changement pour $\boldsymbol{A}$: $\quad \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{A}} = -(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{AS})\boldsymbol{S}^T$
- Nouveau calcul pour $\boldsymbol{S}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial S_{1n}} &= -[\boldsymbol{A_a^T}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{AS})]_{1n} - [\boldsymbol{S_a}]_{2n} \times [\boldsymbol{A_b^T}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{AS})]_n \\ \frac{\partial J}{\partial S_{2n}} &= -[\boldsymbol{A_a^T}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{AS})]_{2n} - [\boldsymbol{S_a}]_{1n} \times [\boldsymbol{A_b^T}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{AS})]_n \end{aligned}$$

Règles de mise à jour

- matrice de mélange $\boldsymbol{A}$: $\quad \boldsymbol{A}^{(m+1)} = \boldsymbol{A}^{(m)} - \alpha \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \boldsymbol{A}}$
- matrice des sources $\boldsymbol{S}$: $\quad$ <u>$\alpha > 0$, petit</u>

$$\begin{aligned}
S_{1n}^{(m+1)} &= S_{1n}^{(m)} - \alpha \frac{\partial J}{\partial S_{1n}} \\
S_{2n}^{(m+1)} &= S_{2n}^{(m)} - \alpha \frac{\partial J}{\partial S_{2n}} \\
S_{3n}^{(m+1)} &= S_{1n}^{(m+1)} S_{2n}^{(m+1)}
\end{aligned}$$

- Pour garantir la **non négativité**: $\quad$ <u>$\epsilon > 0$, très petit</u>

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{(m+1)} &= max\{\boldsymbol{A}^{(m+1)}, \epsilon\} \\
\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{a}}^{(m+1)} &= max\{\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{a}}^{(m+1)}, \epsilon\}
\end{aligned}$$

cf [Meganem et al., 2011a, Eusipco]

Critères de performances

- Angle (en radian) pour les spectres (SAM):

$$SAM_j = arcos\left(\frac{<\boldsymbol{\rho_j}, \boldsymbol{\hat{\rho}_j}>}{\| \boldsymbol{\rho_j} \| \| \boldsymbol{\hat{\rho}_j} \|}\right)$$

- RMSE pour les coefficients de mélange :

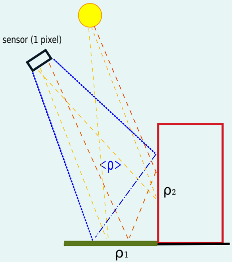
$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{NP}\sum_{i,j}(a_{ij} - \hat{a}_{ij})^2}$$

Conditions de test

Données

- 9 images simulées de 20 pixels
    - 1 matrice $\boldsymbol{A}$ (20x3) générée aléatoirement et vérifiant : positivité et somme à 1 des coeffs linéaires
    - 1 image = 1 couple de spectres mélangés par la matrice $\boldsymbol{A}$: (i =1...20)

$$< \rho >_i = a_1(i)\boldsymbol{\rho_1} + a_2(i)\boldsymbol{\rho_2} + a_{1,2}(i)\boldsymbol{\rho_1} \odot \boldsymbol{\rho_2}$$



- Matériaux :
    - au sol : asphalte, sol nu, pelouse
    - murs : brique, aluminium, béton

Initialisation de l'algorithme

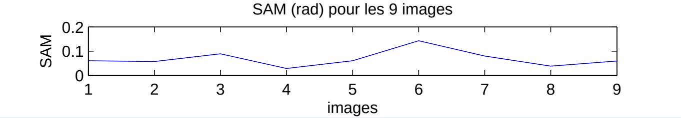
- $\boldsymbol{S}^0$: 1 spectre constant
- $\boldsymbol{A}^0$: matrice générée aléatoirement puis normalisée pour respecter la condition de somme à 1 des coeffs linéaires .

Résultats

Résultats présentés

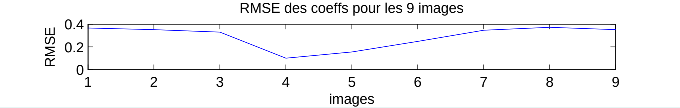
- Pour chaque image : moyenne des performances sur 20 init. différentes.

Estimation des spectres



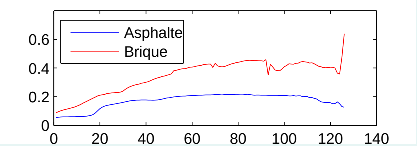
- SAM $<$ 0.1 pour 8 images sur 9 !
- Moyenne des résultats sur les 9 images : $SAM = 0.07$ rad

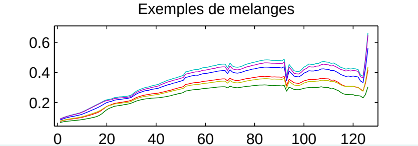
Estimation des coefficients



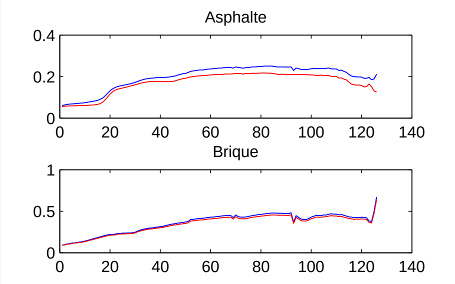
- Moyenne des résultats sur les 9 images : $RMSE = 0.29$.

Exemple d'1 couple de spectres





- rouge : vrais spectres
- bleu : estimations



SAM = 0.025 rad

- Résultats très encourageants
- Estimer les spectres urbains n'est pas simple car les spectres sont corrélés (ici 0.86) et la NMF est sensible à ce problème !

Pour conclure...

Conclusion

- ✓ Modèle de mélange pour les milieux urbains : linéaire quadratique → validation + étude des propriétés physiques
- ✓ Méthode de démélange adaptée à ce mélange linéaire quadratique : basée sur la NMF
- ✓ Résultats bons et encourageant avec des mélange artificiels en démélange hyperspectral

Perspectives (démélange spectral)

- → Travailler sur le cas général de N sources.
- → Passer à un algorithme plus performant que le gradient à pas fixe
- → Tester sur des cas plus compliqués et des images réelles.

Références

Meganem, I., Deville, Y., Hosseini, S., Déliot, P., and Briottet, X. (2011a). Linear-quadratic and polynomial non-negative matrix factorization; application to spectral unmixing. In *Proceedings of the 19th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Barcelona, Spain*.

Meganem, I., Déliot, P., Briottet, X., Deville, Y., and Hosseini, S. (2011b). Physical modelling and non-linear unmixing method for urban hyperspectral images. In *Proceedings of 3rd IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing (WHISPERS), Lisboa, Portugal*.